

إعداد: عبد المطلب

بوزريعة، جمادى الأولى 1443هـ

المتتاليات العددية

Suites numériques

تمرين 6

عَيِّن الحدود الثلاثة الأولى v_1, v_2, v_3 لمتتالية هندسية حدودها سالبة والمعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} v_1 \times v_2 \times v_3 = -1 \\ v_1 + v_2 - 6v_3 = 0 \end{cases}$$

$$-0,5, -1, -2$$

تمرين 7

(v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما بحيث:

$$\begin{cases} \ln v_1 + \ln v_5 = 4 \ln 2 + 2 \ln 3 \\ v_2 + v_3 + v_4 = 42 \end{cases}$$

أثبت أن $v_1 \times v_5 = v_3^2$ ، ثم احسب v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 .

$$3, 6, 12, 24, 48 \quad 48, 24, 12, 6, 3$$

تمرين 8

عَيِّن الحدود v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 لمتتالية هندسية متناقصة تماما حيث:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 140 \\ v_3 + v_4 + v_5 = 35 \end{cases}$$

$$5, 10, 20, 40, 80$$

تمرين 9

(v_n) متتالية هندسية حيث: $v_3 = e^4$ و $v_6 = e^{10}$.

1- عَيِّن الأساس q والحد الأول v_1 .

2- اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

3- احسب بدلالة n المجموعين: $S_1 = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

$$S_2 = \sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} + \dots + \sqrt{v_n}$$

$$\frac{e^n - 1}{e - 1} \quad \frac{e^{2n} - 1}{e^2 - 1} \quad e^{2n-2} \quad 1 \quad e^2$$

تمرين 10

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \frac{\alpha^2 + n - 1}{\alpha + 1} \quad \text{نضع } \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\} \text{ و}$$

1- بَيِّن أَنَّ (u_n) متتالية حسابية. احسب أساسها r و u_0 .

2- من أجل كل $n > 0$ نضع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$

$$S_n = \frac{n(n + 2\alpha^2 - 3)}{2(\alpha + 1)} \quad \text{بَيِّن أَنَّ:}$$

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = e^{u_n}$

بَيِّن أَنَّ (v_n) متتالية هندسية. احسب أساسها q و v_0 .

4- نضع: $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_{n-1}$. بَيِّن أَنَّ $P_n = e^{S_n}$.

$$v_0 = e^{\alpha-1} \quad q = e^{\frac{1}{\alpha+1}} \quad u_0 = \alpha - 1 \quad r = \frac{1}{\alpha+1}$$

المتتالية الحسابية والمنتتالية الهندسية

تمرين 1

عَيِّن الحدود الثلاثة الأولى u_0, u_1, u_2 لمتتالية حسابية المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = 3 \\ u_0 \times u_1 \times u_2 = -24 \end{cases}$$

$$-4, 1, 6 \quad 6, 1, -4$$

تمرين 2

لتكن u_0, u_1, u_2 الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية الحسابية

$$\begin{cases} 2u_0 - u_1 + u_2 = -1 \\ u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 = 62 \end{cases}$$

عَيِّن الأساس r لهذه المتتالية ثم استنتج الحدود u_0, u_1, u_2 .

$$7, 2, -3 \quad 5$$

تمرين 3

(u_n) المتتالية الحسابية المعرفة بحدّها الأول $u_1 = 3$ وبمجموع

حدودها الأربعة الأولى: $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = -18$.

1- عَيِّن أساس هذه المتتالية وحدّها العاشر.

2- اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

3- احسب المجموعين: $S_1 = u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$

$$S_2 = u_{11} + u_{12} + \dots + u_{20}$$

$$-695 \quad -195 \quad 8 - 5n \quad -42 \quad -5$$

تمرين 4

(u_n) متتالية حسابية متزايدة حيث $u_3 = 2$ و $\frac{1}{u_5} - \frac{1}{u_1} = \frac{3}{8}$.

1- عَيِّن الأساس r لهذه المتتالية وحدّها الأول u_1 .

2- احسب المجموع S_n حيث $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

ثم عَيِّن أصغر عدد طبيعي n_0 يحقّق $S_{n_0} > 217$.

$$15 \quad \frac{n(3n-11)}{2} \quad -4 \quad 3$$

تمرين 5

(u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -5$ و $u_3^2 + u_7^2 = 650$.

1- احسب الحد u_5 إذا علمت أنّه موجب ثم احسب u_0 .

2- احسب المجموع: $S_n = 40 + 35 + \dots + (-5n + 40)$

عَيِّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $8S_n \geq 945$.

$$3 \leq n \leq 12 \quad \frac{(n+1)(-5n+80)}{2} \quad 40 \quad 15$$

البرهان بالتراجع، تغيرات متتالية وتقاربا

تمرين 11

(u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $u_0 = 4$ ومن أجل

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 20}, \quad n \text{ عدد طبيعي}$$

1- برهن أنه من أجل كل $n \geq 0$ فإن $4 \leq u_n < 5$.

2- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

3- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة. احسب نهايتها.

تمرين 12

(u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $u_0 = -1$ ومن أجل

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{2}, \quad n \text{ عدد طبيعي}$$

1- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n < 3$.

2- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة. احسب نهايتها.

4- بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن $u_n = 3 - 2^{-n+2}$.

تمرين 13

(u_n) متتالية معرفة بـ: $u_1 = \frac{5}{8}$ و $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$

1- برهن أنه من أجل كل $n \geq 1$ فإن $0 < u_n < 1$.

2- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

3- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة. احسب نهايتها.

تمرين 14

(u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $u_0 = 2$ ومن أجل

$$u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{2u_n - 1}, \quad n \text{ عدد طبيعي}$$

1- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 1$.

2- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

3- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة. احسب نهايتها.

4- بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن $u_n = \frac{2n+2}{2n+1}$.

تمرين 15

(u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}, \quad n \text{ عدد طبيعي}$$

1- احسب u_1, u_2, u_3 ثم أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n .

2- برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن $u_n = \frac{1}{n+1}$.

3- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واحسب نهايتها.

تمرين 16 بكالوريا

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ ومن

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3, \quad n \text{ عدد طبيعي}$$

1- ادرس رتبة المتتالية (u_n).

2- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > n^2$.

- ما هي نهاية المتتالية (u_n)؟

3- أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n ، ثم برهن تخمينك.

تمرين 17

f الدالة المعرفة على المجال $[-1;1]$ بـ: $f(x) = \frac{-2x+1}{x-2}$.

1- أ) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-1;1]$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-1;1]$ ،

فإن $f(x)$ ينتمي إلى المجال $[-1;1]$.

2- لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 0$

$$\text{ومن أجل كل عدد طبيعي } n, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-1 \leq u_n \leq 1$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n). استنتج أن المتتالية (u_n)

متقاربة ثم احسب نهايتها.

تمرين 18 بكالوريا

a عدد حقيقي حيث $-1 < a < 0$. نعتبر المتتالية u المعرفة

$$u_0 = a, \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, \quad u_{n+1} = u_n^2 + u_n.$$

1- ادرس اتجاه تغير المتتالية u .

2- أ) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = x^2 + x$.

ادرس اتجاه تغير الدالة h . استنتج أنه من أجل كل x من

المجال $]-1;0[$ ، $h(x)$ ينتمي كذلك إلى المجال $]-1;0[$.

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-1 < u_n < 0$.

3- ادرس تقارب المتتالية u . احسب نهايتها.

تمرين 19

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ نعتبر ما يلي: $u_n = n^2 - 2n + 5$ ،

$$x_n = \frac{n \cos n}{2n^2 + 1} \text{ و } w_n = n - \ln(n+2), \quad v_n = ne^{-2n+1}$$

1- ادرس اتجاه تغير كل من (u_n)، (v_n) و (w_n).

2- بين أن (v_n) محدودة من الأسفل بالعدد 0 أي $v_n > 0$.

3- ادرس تقارب كل من (u_n)، (v_n)، (w_n) و (x_n).

تمرين 20

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = 10$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ: $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ، وليكن ($\mathcal{C}$) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$).

- 1- ارسم البيان ($\mathcal{C}$) والمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$.
- مثل على المحور ($O; \vec{i}$) الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4 ، مبرزاً خطوط الرسم ثم خمن تغيرات المتتالية (u_n) ونهايتها.
- 2- لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - 2$.
- برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب حساب أساسها q .
- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .
- ادرس تغيرات (u_n) ثم احسب نهايتها لما $n \rightarrow +\infty$.

$q = \frac{1}{2}$	2^{-n+3}	$2+2^{-n+3}$	2
-------------------	------------	--------------	---

تمرين 21

(u_n) متتالية عددية حدودها موجبة تماماً معرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n}$.

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـ: $f(x) = \frac{x+2}{x}$ ، وليكن ($\mathcal{C}$) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$).

- 1- ادرس تغيرات الدالة f ، ثم ارسم المنحني ($\mathcal{C}$) والمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ (وحدة الطول 2cm).
- 2- مثل على المحور ($O; \vec{i}$) الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 دون حساب، مبرزاً خطوط الرسم ثم خمن نهاية المتتالية (u_n).
- 3- لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 2}$.
- بين أن (v_n) متتالية هندسية، ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n .
- 4- تحقق أن $u_n = 2 + \frac{3}{v_n - 1}$ ، ثم اكتب عبارة u_n بدلالة n .

5- احسب المجموعين: $S_n = \sum_{p=0}^n v_p$ و $S'_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{u_p - 2}$

$q = -2$	$(-2)^{n+1}$	$S_n = -\frac{2+(-2)^{n+2}}{3}$	$S'_n = \frac{S_n - n - 1}{3}$
----------	--------------	---------------------------------	--------------------------------

تمرين 22

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_1 = 19$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_{n+1} = \frac{2n}{n+1}u_n - 1$.

من أجل كل $n \geq 1$ ، نضع: $v_n = n(u_n - 1) - 2$.

1- برهن أن (v_n) متتالية هندسية متزايدة تماماً.

2- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3- احسب المجموعين: $S_n = \sum_{p=1}^n v_p$ و $S'_n = \sum_{p=1}^n p \times u_p$

$q = 2$	2^{n+3}	$\frac{2^{n+3} + n + 2}{n}$	$2^{n+4} - 16$	$2^{n+4} - 16 + \frac{n^2 + 5n}{2}$
---------	-----------	-----------------------------	----------------	-------------------------------------

تمرين 23

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 2}$ و $v_n = \frac{u_n + 4}{u_n}$.

- 1- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$.
- 2- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً واستنتج أنها متقاربة.
- 3- برهن أن (v_n) متتالية حسابية يطلب حساب أساسها r .
- 4- اكتب عبارة كل من v_n و u_n بدلالة n ثم احسب نهاية u .
- 5- احسب المجموع: $S_n = \frac{4}{u_0} + \frac{4}{u_1} + \dots + \frac{4}{u_n}$

$r = 2$	$2n+2$	$4/(2n+1)$	$(n+1)^2$
---------	--------	------------	-----------

تمرين 24

(u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_n = \alpha u_{n-1} + 2$. $0 < \alpha < 1$.

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$ ، نضع: $v_n = u_n + \frac{2}{\alpha - 1}$.

- 1- برهن أنه من أجل كل $n \geq 0$ فإن $u_n > 0$.
- 2- برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب حساب أساسها q .
- 3- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .
- 4- احسب نهاية u_n لما $n \rightarrow +\infty$.
- 5- احسب المجموعين: $S_n = \sum_{p=0}^{n-1} v_p$ و $S'_n = \sum_{p=0}^{n-1} u_p$

$q = \alpha$	$l = \frac{2}{1-\alpha}$	$S'_n = \frac{(\alpha+1)(\alpha^n - 1)}{(\alpha-1)^2} - \frac{2n}{\alpha-1}$
--------------	--------------------------	--

تمرين 25

(u_n) $_{n \in \mathbb{N}^*}$ المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_n = \frac{1}{4n^2 - 1}$.

- 1- برهن أن (u_n) $_{n \in \mathbb{N}^*}$ متناقصة تماماً.
- 2- عيّن العددين α و β بحيث: $u_n = \frac{\alpha}{2n+1} + \frac{\beta}{2n-1}$
- 3- احسب المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
- احسب نهاية S_n لما $n \rightarrow +\infty$.
- 4- عيّن أصغر قيمة لـ n بحيث $1 - 2S_n < 2,475 \times 10^{-4}$.

$u_n = \frac{-1}{2(2n+1)} + \frac{1}{2(2n-1)}$	$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}$	2020
--	---	------

تمرين 26

(u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $u_0 = 2\alpha + 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $2u_{n+1} = u_n + 3\alpha$.

1- عيّن قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون (u_n) ثابتة.

في باقي التمرين نفرض أنّ (u_n) غير ثابتة ونضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - \beta$ (β عدد حقيقي).

2- أوجد علاقة بين α و β حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب حساب أساسها q وحددها الأول v_0 . في هذه الحالة:

3- اكتب عبارة u_n بدلالة n و α ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4- ناقش حسب قيم العدد الحقيقي α تغيرات المتتالية (v_n).

5- احسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

6- من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $w_n = \ln(u_n - 3\alpha)$ ، عيّن قيم α حتى تكون (w_n) معرفة ثم بيّن أنّ (w_n) حسابية.

$2(1-\alpha)(1-2^{-n-1})+3\alpha(n+1)$	$(1-\alpha)2^{-n}+3\alpha$	$\beta=3\alpha$	1
--	----------------------------	-----------------	---

تمرين 27

(u_n) متتالية معرفة بـ: $\begin{cases} u_0 = 1, & u_1 = 3 \\ 3u_{n+1} - 4u_n = -u_{n-1} & n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_{n+1} - u_n$

1- برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$.

2- احسب المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.

3- أثبت أنّ $S_n = u_n - u_0$. استنتج عبارة u_n بدلالة n .

4- احسب المجموع: $S'_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_{n-1}^2$

$9(1-3^{-2n})/2$	$4-3^{-n+1}$	$3-3^{-n+1}$
------------------	--------------	--------------

تمرين 28

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 0$ ومن أجل

كل عدد طبيعي n ، $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$ و $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$.

1- برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 1$.

2- بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما واستنتج أنّها متقاربة.

3- بيّن أنّه مهما يكن العدد n ، $1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(1 - u_n)$ ، وأنّ

$1 - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، ثم استنتج حساب l نهاية المتتالية (u_n).

4- (أ) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{5}$.

(ب) اكتب عبارة u_n بدلالة v_n ثم تأكد من l الموجودة سابقا.

تمرين 29

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ ومن

أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 5}$.

1- برهن أنّه من أجل كل عدد $n \geq 0$ ، فإنّ $1 \leq u_n \leq 5$.

2- بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما واستنتج أنّها متقاربة.

3- بيّن أنّه مهما يكن العدد n ، $5 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(5 - u_n)$ ، وأنّ

$\left(\frac{1}{2}\right)^n (5 - u_0) \leq 5 - u_n \leq 0$ ، ثم استنتج نهاية (u_n).

تمرين 30

(u_n) متتالية عددية حدودها موجبة، معرفة بحددها الأول

$u_1 = e^3$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $(u_{n+1})^2 e = u_n$.

لتكن (v_n) متتالية معرفة بـ: $v_n = \frac{1 + \ln u_n}{2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

1- برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب حساب أساسها q و v_1 .

2- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3- احسب $S_n = \sum_{p=1}^n v_p$ والجداء $P_n = \prod_{p=1}^n u_p$ ونهاية كل منهما.

$e^{8-2^{-n+3}-n}$	$4-2^{-n+2}$	$e^{2^{-n+3}-1}$	2^{-n+2}	2	0,5
--------------------	--------------	------------------	------------	---	-----

تمرين 31

نعتبر المتتاليات u ، v و w المعرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ بـ:

$$u_n = \frac{2n+1}{n+1}, \quad v_n = \frac{2n+3}{n+1}, \quad w_n = \frac{n+1}{n+2}$$

1- بيّن أنّ u و v متجاورتان ثم احسب نهايتهما المشتركة.

2- بيّن أنّ: $\ln w_0 + \ln w_1 + \dots + \ln w_n = -\ln(n+2)$.

تمرين 32

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n بـ:

$$\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1- احسب u_1 ، v_1 ، u_2 و v_2 .

2- من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $w_n = v_n - u_n$.

(أ) برهن أنّ المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$.

(ب) اكتب عبارة w_n بدلالة n وحدد نهاية المتتالية (w_n).

3- ادرس تغيرات (u_n) و (v_n)، ثم بيّن أنّهما متجاورتان.

4- لتكن (t_n) متتالية معرفة بـ: $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ ، $n \in \mathbb{N}$.

بيّن أنّ (t_n) ثابتة. استنتج نهاية المتتاليتين (u_n) و (v_n).

$l = \frac{11}{3}$	$w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$
--------------------	------------------------------------